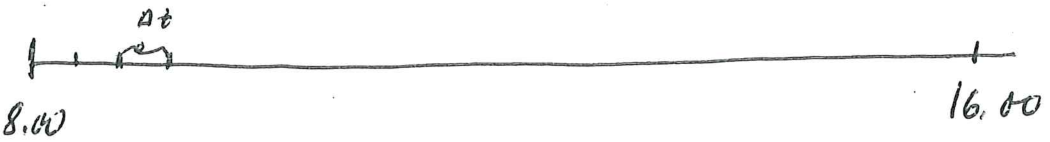
5.6 Poissonfordelinga og Poisson-prosessen

La X vere talet på gonger ei hending skjer i løpet av eit visst tidsintervall, på ei viss flate eller i eit visst volum

<u>Eks.</u> La X vere talet på SMS ein person mottek i løpet av ein dag mellom 8.00 og 16.00.



La A vere hendinga at personen mottek ein SMS i eit intervall av lengde Δt. $P(A) = p$. La $n = \frac{8}{\Delta t}$

Dersom alle innkomne SMS er uavhengige kunne ein tru at $P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$

Problemet er at ein kan få meir enn ein SMS i intervallet Δt

La Δt vere eit lite tidsintervall/område/areal o.l.

Ein prosess der

- Talet på hendingar i disjunkte intervall/områdes/areal er uavh.
- $P(\text{ei hending skjer i } \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ der $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

• P(meir enn ei hending skjer) = $o(\Delta t)$ ɔ: neglisjerbart når Δt er liten.

Då er talet på gonger hendinga skjer i intervallet / området / arealet av storleik t, X, Poisson-fordelt med parameter λt ɔ:

$$P(X=x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$\overset{u=x-1}{=} \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^u}{u!} = \lambda t.$$ (λ er forventinga i eit intervall av lengde 1)

Det kan visast at variansen til X og er λt

$$\sigma^2 = Var[X] = E[X^2] - \mu^2 = E[X(X-1)] + \mu - \mu^2$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} = (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{x-2}}{(x-2)!}$$

$$\overset{u=x-2}{=} (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^u}{u!} = (\lambda t)^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

Eks. La X vere talet på sjokoladebitar i ein bolle laga frå ei deig på 5 kg. Gå ut i frå at det er 500 ~~rosiner~~ sjokoladebitar i deiga og at ein bolle veg 40 g

λ = gjennomsnittstal av sjokoladebitar pr. kg = $\frac{500}{5} = 100$

$t = \frac{40}{1000} = \frac{1}{25} \Rightarrow \lambda t = 4$

$$P(X=x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} = \frac{4^x e^{-4}}{x!}$$

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0.018	0.073	0.147	0.195	0.195	0.156	0.104

Eks. med SMS / telefonsamtaler

$P(\text{SMS i } \Delta t) \approx \lambda \Delta t = p$. Dersom Δt er liten nok

ɔ: $\frac{t}{\Delta t} = n$ svært stor

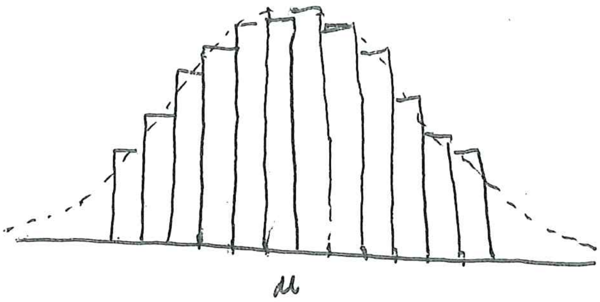
blir $P(X=x) = \binom{n}{x} (\lambda \Delta t)^x (1-\lambda \Delta t)^{n-x}$ ɔ: $X \approx B(n, \lambda \Delta t)$

Sidan $p = \lambda \frac{t}{n}$ får vi $\lambda t = np$.

Kap 6. Kontinuerlege sannsynsfordelingar

Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855). De Moivre 1733

Måling av storleik n gonger. Fordeling av resultata



Studiar førte fram til sannsynstettleiken

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad -\infty<x<\infty$$

Ein stokastisk variabel med ein slik sannsynstettleik seiast å vere normalfordelt, skriv $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

Eks.

Kast ein terning n gonger. La X = sum talet på auge

n stor $\Rightarrow$ $X \approx$ normalfordelt.

Nesten generelt $\sum_{i=1}^{n} X_i$ er $\approx$ normalfordelt når n er stor nok.

$$E[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx. \quad \text{La } z=\frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow dx=\sigma\, dz$$

Vi får: $$E[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sigma}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma z)\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \mu\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{1} + \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z\, e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{0}$$

$= \mu$